

## Statistikai próba elve

1. Felállítunk egy **0-hipotézist** a populáció(k)ra vonatkozóan, amelyből a minták (mért adatok) származnak
2. Keresünk egy **statisztikát** (mintaváltozót: a mintákból számolható paramétert), amelynek **eloszlása ismert** a 0-hipotézis és esetleg néhány más feltétel teljesülése esetén.
3. A mintafüggvény kiszámolt értékét összehasonlítjuk (táblázatból kikeresett) **határértékekkel**, amelyeken kívül a mintafüggvény értéke a hipotézis teljesülése esetén csak a választott kis valószínűséggel esik.
4. Ha a számolt érték kívül esik a határon: a 0-hipotézist az **adott valószínűségi szinten elvetjük**.  
Ha nem: „a mért adatok nem mondanak ellent a 0-hipotézisnek”

Varga J.

Statisztika: gyakori módszerek és hibák

32

## Student-féle 2-mintás t-próba

1. **0-hipotézis:** a minták azonos populációból származnak
2. **Statisztika** (mintaváltozó):

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{SE(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}$$

$$s^2_{közös} = \frac{df_1 \cdot s_1^2 + df_2 \cdot s_2^2}{df_1 + df_2}$$

$$df_i = n_i - 1$$

$$SE(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \sqrt{s^2_{közös} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

- **Eloszlása, ha a minták:**

- Normális eloszlásúak
- Azonos szórással

Student-féle t-eloszlás, szabadsági fok:

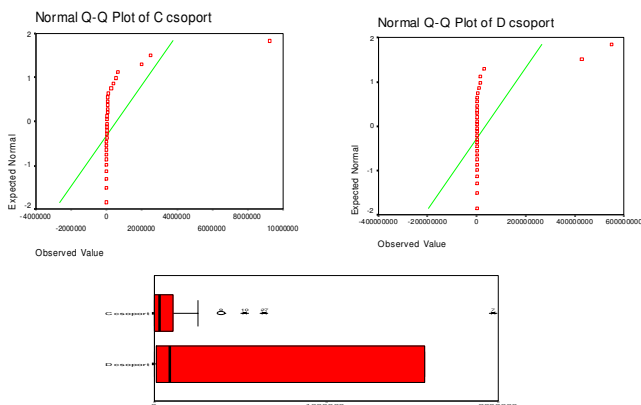
$$df = df_1 + df_2 = n_1 + n_2 - 2$$

Varga J.

Statisztika: gyakori módszerek és hibák

33

## Normalitás grafikus ellenőrzése: korábbi példa

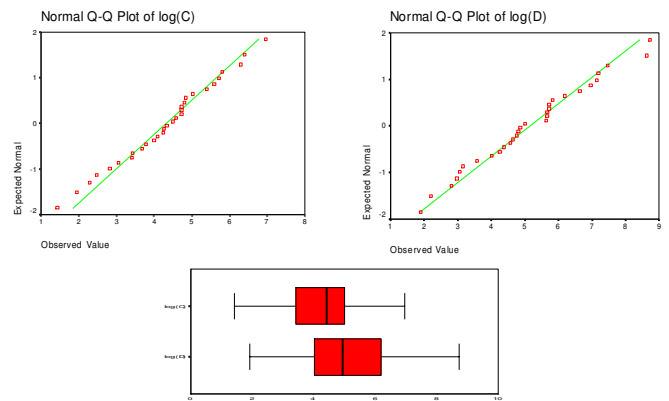


Varga J.

Statisztika: gyakori módszerek és hibák

34

## Logaritmikustranzformáció, korábbi pl.:

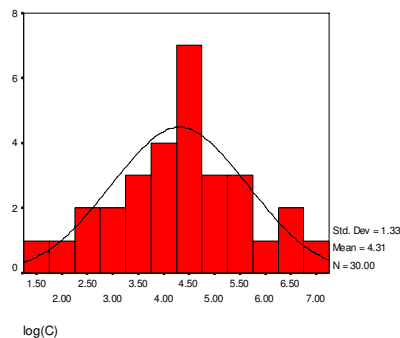


Varga J.

Statisztika: gyakori módszerek és hibák

35

## Gyakorisági hisztogram log trf. után:



Varga J.

Statisztika: gyakori módszerek és hibák

36

## Normalitás-próbák

Descriptive Statistics					
	N	Skewness		Kurtosis	
		Statistic	Std. Error	Statistic	Std. Error
C csoport	30	4.68	0.43	23.36	0.83
D csoport	30	3.75	0.43	13.26	0.83
log(C)	30	-0.20	0.43	-0.19	0.83
log(D)	30	0.16	0.43	-0.42	0.83

### Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov <sup>a</sup>			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
C csoport	.379	30	.000	.339	30	.000
D csoport	.463	30	.000	.310	30	.000
log(C)	.081	30	.200 <sup>*</sup>	.987	30	.962
log(D)	.082	30	.200 <sup>*</sup>	.979	30	.794

\*. This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

Varga J.

Statisztika: gyakori módszerek és hibák

37

## Normalitás-próba: értelmezés

P érték	Minta mérete	Következtetés
Kicsi	Bármilyen	A minta nem Gauss-eloszlású
Nagy	Nagy	A populáció valószínűleg (legalább közelítőleg) Gauss-eloszlású
Nagy	Kicsi	A próba nem mond ellent (de nem is bizonyítja) a Gauss-eloszlást

Varga J.

Statisztika: gyakori módszerek és hibák

38

## Szórások egyezésének ellenőrzése:

Kétmintás F-próba a szórásnégyzetre					
	D csop.	C csop.	log(C)	log(D)	
Várható érték	35208350.3	533866.6185	4.308	5.140	
Variancia	1.5529E+16	3.00986E+12	1.779	3.135	
Megfigyelések	30	30	30	30	
df	29	29	29	29	
F	5159.4976		0.567		
P(F<=f) egyszélű	0.0000		0.066		
F kritikus egyszélű	1.8608		0.537		

Varga J.

Statisztika: gyakori módszerek és hibák

39

## Pl.: 2 csoport átlagának összehasonlítása

E	B	Kétmintás t-próba egyenlő szórásnégyzeteknél	
		E	B
123.3	74.3		
89.6	125.0	Várható érték	105.4 126.0
103.8	178.7	Variancia	185.4 1839.3
99.5	42.1	Megfigyelések	20 20
117.4	95.0		
110.1	105.7	Súlyozott variancia	1012.3
98.5	105.1		
70.5	152.2	Feltételezett átlagos eltérés	0
113.0	115.3		
98.0	105.1	df	38
104.2	49.2	t érték	-2.047
111.5	169.2	P(T<=t) egyszélű	0.024
120.0	135.1		
109.0	204.2	t kritikus egyszélű	1.686
86.9	137.4		
96.6	132.3	<b>P(T&lt;=t) kétszélű</b>	<b>0.048</b>
121.5	184.3	t kritikus kétszélű	2.024
119.6	143.7		
96.8	105.7		
117.6	159.9		

Varga J.

Statistika: gyakori módszerek és hibák

40

## Különböző szórások?

### Kétmintás F-próba a szórásnégyzetre

	B	E
Várható érték	126.0	105.4
Variancia	1839.3	185.4
Megfigyelések	20	20
df	19	19
F	9.9	
P(F<=f) egyszélű	<b>0.0000</b>	
F kritikus egyszélű	2.2	

### Kétmintás t-próba nem-egyenlő szórásnégyzeteknél

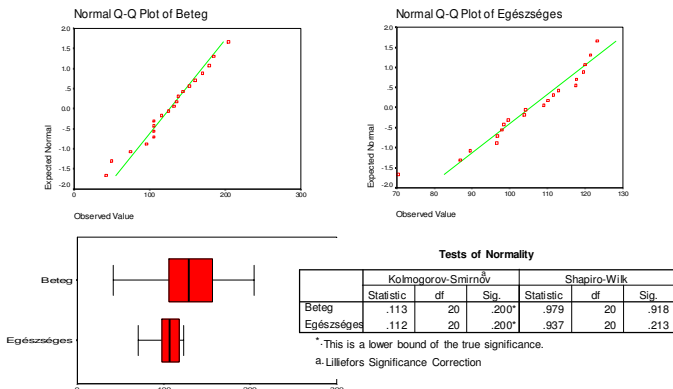
	E	B
Várható érték	105.4	126.0
Variancia	185.4	1839.3
Megfigyelések	20	20
Feltételezett átlagos eltérés	0	
df	23	
t érték	-2.047	
P(T<=t) egyszélű	0.026	
t kritikus egyszélű	1.714	
<b>P(T&lt;=t) kétszélű</b>	<b>0.052</b>	
t kritikus kétszélű	2.069	

Varga J.

Statistika: gyakori módszerek és hibák

41

## SPSS: Bemutató

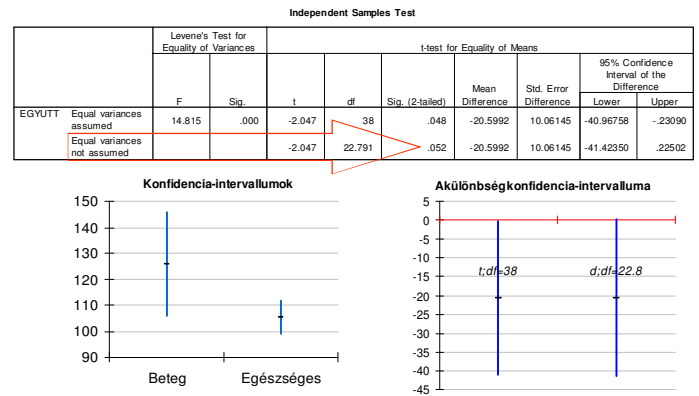


Varga J.

Statistika: gyakori módszerek és hibák

42

## SPSS: átlagok összehasonlítása



Varga J.

Statistika: gyakori módszerek és hibák

43

## Átlagok összehasonlítása: Tanulságok

- Először célszerű ránézni a „Box & Whiskers” diagramra
- Mindenképp ellenőrizni kell a **szórások egyezését** (pl. F-próbával v. Levene-féle s-próbával)
- Bár a **normalitástól** való szignifikáns eltérés ritka, azt is célszerű ellenőrizni, különösen, ha a szórások különböznek
- Ha mindkét próba eltérést mutat a t-próba feltételeitől, célszerű megpróbálni az adatok **transzformálását**
- Ha csak a szórás különbözik, **Welch-féle d-próba** végezhető

Varga J.

Statistika: gyakori módszerek és hibák

44

## Egy mintás / párosított t-próba

- Normális eloszlású a populáció ill. a **különbség**?
- Függetlenek az adatok / adatpárok?
- Tényleg csak az átlag érdekel?
- Ha egyoldalú próba: indokolt ez?

Varga J.

Statistika: gyakori módszerek és hibák

45

## Párosítatlan (2 mintás) t-próba

- Feltételek:
  - Normális eloszlású minták? (Különösen fontos kis esetszámnál!)
  - Azonosak a szórások?
- Nem párosíthatók az adatok?
- Függetlenek a „hibák”?
- Pontosan 2 csoportot akarsz összehasonlítani?
- Mindkét oszlopban mért adatok vannak? (v.ö. 1 mintás t)
- Csak az átlagokat akarod összehasonlítani? (nem az adatok átfedését)
- 1 oldalú próbánál: indokolható ez?

Varga J.

Statistika: gyakori módszerek és hibák

46

## Egy oldali próba: mikor?

- Előre megjósolható, és az adatgyűjtés előtt rögzítettük, melyik csoport átlaga lehet magasabb
- Ha mégis fordított irányú különbség adódik (bármekkora is), ezt a véletlenre foghatjuk

Varga J.

Statistika: gyakori módszerek és hibák

47

## P-érték értelmezése

Pl.:  $P=0.03$  -at számolunk

- „97%-os esélye van, hogy a megfigyelt különbség a populációk valódi különbözőségéből adódik”
- NEM!**  
Valójában: Ha a 0-hipotézis igaz, az esetek 97%-ában kisebb különbséget kapnánk.  
3%-ában pedig ekkorát vagy nagyobbat.
- Minek a 3%-a?  
Minden lehetséges kimenetelnek, **HA IGAZ A 0-HIPOTÉZIS!**
- NEM** az összes lehetséges kimenetelnek!!!

Varga J.

Statisztika: gyakori módszerek és hibák

48

## P-érték és konfidencia-intervallum

- P: van-e hatás / különbség?
  - A 0-hipotézis elvetésének biztonságát méri
  - A megfigyelt jelenség mértékét, klinikai jelentőségét NEM!
  - A hipotézis nem bizonyítható, csak elvethető!
- Konfidencia-intervallum: a hatás / különbség nagyságának megítélésére
  - A mért adatok alapján valószínűleg hová esik az eredmény
  - Nem csoportonként külön kell számolni, hanem pl.:
    - Átlagok összehasonlításakor a különbségre
    - Arányok összevetésekor az arányok különbségére

Varga J.

Statisztika: gyakori módszerek és hibák

49

## „Statisztikailagszignifikáns, orvosilag nem”

- A P-érték (csak) a 0-hipotézis elvetésének biztonságát méri; belőle NEM vonható le következtetés az eltérés nagyságáról!
- Ha a **konfidencia-intervallum széles**, a 0 különbséget és a klinikailag jelentős különbséget is magába foglalja: **ez a kísérlet nem döntötte el a kérdést**
- Ha a **konfidencia-intervallum** a 0 különbséget magába foglalja, és **keskeny**, a klinikailag számottevő különbségeket nem közelíti meg: **a különbség lényegtelen**

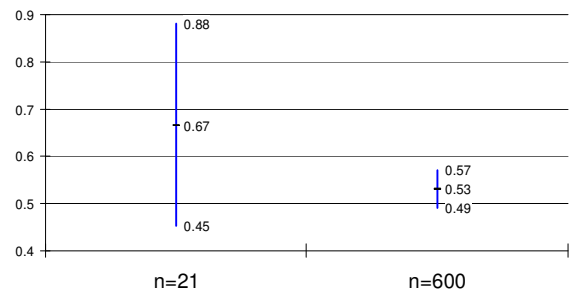
Varga J.

Statisztika: gyakori módszerek és hibák

50

## Pl.: „A” és „B” jelenség bekövetkezési esélye:

- $n=21$ ,  $A/B=14/7$ : túl széles konfidencia-intervallum, nem lehet rámondani, hogy „A” gyakoribb „B”-nél (a kísérlet nem döntött)
- $n=600$ ,  $A/B=318/282$ : keskeny konfidencia-intervallum, lényegtelen különbség



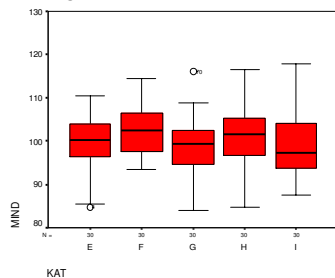
Varga J.

Statisztika: gyakori módszerek és hibák

51

## Pl.: 5 csoport

- Az eseteket 5 csoportra osztjuk  
Jelölés: E, F, G, H, I
- Kérdés: van-e köztük különbség?



Varga J.

Statisztika: gyakori módszerek és hibák

52

## „Rutin”: Csoportok összehasonlítása = t-próba

Egytényezős varianciaanalízis					
t, vs:	E	F	G	H	I
	0.109	0.489	0.406	0.503	
		0.024	0.527	0.031	
			0.145	0.992	
				0.160	

ÖSSZESÍTÉS				
Csoportok	Darabszám	Összeg	Átlag	Variancia
E	30	3000.3	100.0	38.3
F	30	3072.5	102.4	27.2
G	30	2965.9	98.9	43.3
H	30	3042.5	101.4	46.7
I	30	2965.3	98.8	51.5

VARIANCIANALÍZIS						
Tényezők	SS	df	MS	F	p-érték	F krit.
Csoportok között	300.1	4	75.0	1.81	<b>0.13</b>	2.43
Csoporton belül	6000.3	145	41.4			
Összesen	6300.4	149				

Varga J.

Statisztika: gyakori módszerek és hibák

53

## Többszörösösszehasonlítás: Bonferroni-korrekción

- Itt  $n=10$  összehasonlítást végzünk!
- Annak valószínűsége, hogy közös populáció esetén minden egyes pár összehasonlításakor 5% feletti valószínűséget kapunk, csak:  
 $P_{10} = 0.95^{10} \cdot 100\% = 59.9\%$
- Ahhoz, hogy a véletlenül talált eltérés valószínűsége **összességében 5% alatt legyen**, a páronkénti összehasonlításokat  $P=0.05/10=0.005$  (pontosan:  $P=0.0051$ ) szinten kell végezni!

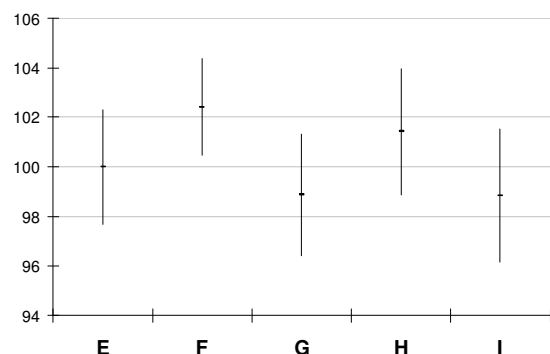
Egytényezős varianciaanalízis					
t, vs:	E	F	G	H	I
	0.109	0.489	0.406	0.503	
		0.024	0.527	0.031	
			0.145	0.992	
				0.160	

Varga J.

Statisztika: gyakori módszerek és hibák

54

## 95%-os konfidencia-intervallumok



Varga J.

Statisztika: gyakori módszerek és hibák

55

## Tanulság:

- Kettőnél több csoport összehasonlítására a páronkénti t-próba csak **korrekcióval** használható (pl. Bonferroni)
- Alapesetben (normális eloszlású csoportok azonos szórással) **variancia-analízist** célszerű választani
- Megkülönböztetendő az az eset, mikor egyetlen kontrollcsoporttal hasonlítjuk össze az összes többi (Dunnett)

## Egy szempontos szórásElemzés („One-way ANOVA”)

- Feltételek:
  - A minták normális eloszlásúak?
  - Azonos a szórásuk?  
(Pl. Bartlett-próba – nagyon érzékeny a normalitásra!)
- Nem összetartozó adatok?  
Ha igen: ismétléses szórásElemzés
- Tényleg csak az átlagok különbsége érdekel?  
Nem az átfedések?
- Csak egy befolyásoló tényező van?
- „Rögzített” tényező, nem véletlen minták sok-sok csoport közül?

## IsmétlésesszórásElemzés („repeated measures ANOVA”)

- Az összetartozó adatok csak egy szempontban különböznek? (A lényeg az egyéni variabilitás kizárása!)
- Függetlenek az egyedek?
- A véletlen hatás normális eloszlású?  
Nem változik az egyedekkel, sem a kezeléssel?
- Csak egy befolyásoló tényező van?
- „Rögzített” tényező, nem véletlen minták sok-sok csoport közül?